SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1997-98

*Enrico Obrecht*

# UNA CLASSE DI EQUAZIONI DI EVOLUZIONE DEL SECONDO ORDINE FORTEMENTE SMORZATE

30 aprile 1998

Tecnoprint - Bologna 1998

**Riassunto.** Vengono esposti alcuni risultati e problemi per equazioni differenziali del tipo

$$u''(t) + m\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2\right) Au(t) + \delta A^{\alpha}u'(t) = 0\,,$$

dove $A$ è un operatore lineare positivo in uno spazio di Hilbert o di Banach, $m$ è una funzione reale non negativa, che in alcuni casi sarà supposta strettamente positiva, e $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

**Summary.** Some results and problems are considered for differential equations such as

$$u''(t) + m\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2\right) Au(t) + \delta A^{\alpha}u'(t) = 0\,,$$

where $A$ is a positive linear operator in a Hilbert or Banach space, $m$ is a nonnegative real function, which will sometimes supposed strictly positive, and $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

## 1. Introduzione

In questo seminario descriverò alcuni risultati riguardanti una classe di equazioni di evoluzione non lineari, del secondo ordine nel tempo.

Nello studio delle oscillazioni trasversali di una corda elastica, Kirchhoff introdusse la seguente equazione

$$\rho h \partial_t^2 u - \left( p_0 + \frac{Eh}{2L} \int_0^L (\partial_x u)^2 \, dx \right) \partial_x^2 u = 0 \tag{1}$$

dove $\rho$, $h$ e $L$ indicano, rispettivamente la densità, l'area della sezione e la lunghezza della corda, $p_0$ è la tensione iniziale e $E$ è il modulo di Young. La funzione incognita $u$ esprime lo spostamento trasversale.

Problemi al contorno per equazioni di questo tipo sono stati studiati a lungo ed è stata dimostrata l'esistenza globale della soluzione, nel caso di dati iniziali analitici.

Si consideri, l'equazione

$$\partial_t^2 u - m \left( \int_{P_n} \|\nabla_x u\|^2 \, dx \right) \Delta_x u = 0 \, , x \in P_n \, , t > 0 \, , \tag{2}$$

con le condizioni iniziali sull'iperpiano $t = 0$ e la condizione di $2\pi$-periodicità della soluzione in ogni variabile di spazio. Qui si è posto $P_n = [0, 2\pi]^n$.

Per questo problema, Bernštein (1940), in una variabile di spazio, e Pohožaev (1975), in più variabili spaziali, hanno provato l'esistenza globale delle soluzioni nel caso non degenere, cioè quando la funzione $m$ ha estremo inferiore positivo, supponendo analitici i dati iniziali. Successivamente, un analogo risultato è stato provato per funzioni $m$ non negative da Arosio e Spagnolo (1984), ma con un'ipotesi tecnica aggiuntiva e, infine, senza nessuna limitazione, tranne la non negatività, da D'Ancona e Spagnolo (1992).

Supponendo invece i dati solamente appartenenti a spazi di Sobolev, nulla è noto oltre all'esistenza locale.

Si sono pertanto introdotti dei termini smorzanti che garantissero, almeno in casi opportuni, l'esistenza globale delle soluzioni. Se scriviamo l'equazione di Kirchhoff nella forma

$$u'' + m \left( \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 \right) Au = 0 \, , \tag{3}$$

dove $A$ è un operatore "positivo" e $m$ è una funzione reale non negativa e continua, termini del tipo $-\delta u'$, $\delta A u'$, $\delta A^\alpha u'$, dove $\delta \in \mathbf{R}^+$, ecc., sono stati aggiunti da vari autori al primo membro dell'equazione (3).

Nel seguito considereremo quasi esclusivamente equazioni "fortemente smorzate", cioè del tipo

$$u'' + m\left(\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2\right) Au + \delta A^\alpha u' = 0\,, \tag{4}$$

dove $\alpha > 0$; il caso più studiato è quello in cui $\alpha = 1$.

È opportuno osservare che l'equazione (4) presenta un comportamento diverso, a seconda che la funzione $m$ venga supposta solo non negativa (caso degenere) oppure si richieda che $m(s) > 0$, $\forall s \in [0, +\infty[$.

È infatti ovvio che, nel caso degenere, non ci si può aspettare che l'equazione abbia un effetto regolarizzante sui dati iniziali; infatti, sia $u_0$ tale che

$$m\left(\|A^{\frac{1}{2}}u_0\|^2\right) = 0\,;$$

allora la funzione costante $u_0$ è soluzione dell'equazione (4) con i dati iniziali $(u_0, 0)$. Nessun effetto regolarizzante è, in tal caso, presente.

Vedremo invece che una delle caratteristiche del caso non degenere, almeno se $\alpha = 1$, è proprio la regolarità $C^\infty$ nelle variabili spaziali, non appena $t > 0$, indipendentemente dalla regolarità dei dati iniziali.

## 2. Il caso hilbertiano

Consideriamo adesso una formulazione dell'equazione (4) in un ambiente hilbertiano:

$$u''(t) + m\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2\right) Au(t) + \delta A^\alpha u'(t) = 0\,. \tag{5}$$

Nel seguito, supporremo sempre verificate le ipotesi seguenti.

(H1) *L'operatore $A$ è autoaggiunto e positivo in uno spazio di Hilbert separabile $H$ e $\mathcal{D}(A)$ è immerso in maniera compatta in $H$.*

(H2) *La funzione $m : [0, +\infty[ \to \mathbf{R}$ è continua e non negativa.*

Talora, supporremo verificate condizioni più restrittive della (H2), che comportano un qualche tipo di positività stretta della funzione $m$ (caso non degenere) oppure una sua maggiore regolarità.

Moltiplicando scalarmente l'equazione (4) per $u'(t)$, otteniamo formalmente:

$$\langle u''(t), u'(t)\rangle + m\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2\right)\langle Au(t), u'(t)\rangle + \delta\langle A^{\alpha}u'(t), u'(t)\rangle = 0\,,$$

da cui

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(M\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2\right)\right) + \delta\left\|A^{\frac{\alpha}{2}}u'(t)\right\|^2 = 0\,,$$

dove si è posto

$$M(s) = \int_0^s m(r)dr\,.$$

Ne consegue che l'energia

$$E_u(t) = \frac{1}{2}\|u'(t)\|^2 + \frac{1}{2}M\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2\right)$$

viene dissipata, in quanto

$$E_u(t) + \delta\int_0^t \left\|A^{\frac{1}{2}}u'(s)\right\|^2 ds = E_u(0)\,.$$

Da qui segue in ogni caso che $\|u'(t)\|^2$ rimane limitata; se, di più, siamo nel caso non degenere, allora, poiché $M(s) \geq m_0 s$, risulterà limitata anche $\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2$.

Questo semplice calcolo fa già presagire che ci dobbiamo aspettare che le soluzioni dell'equazione esistano per tutti i tempi, indipendentemente dal fatto che i dati iniziali siano piccoli.

Numerosi ricercatori si sono occupati di equazioni del tipo della (4), in ipotesi analoghe alle (H1)-(H2); citiamo qui Medeiros e Milla Miranda (1990), Nishihara (1984) e (1993), Muñoz Rivera (1992).

Lo strumento maggiormente utilizzato nello studio del problema di Cauchy per l'equazione (5) è il metodo di Galërkin; questo giustifica l'ipotesi di compattezza dell'immersione, fatta nell'ipotesi (H1).

Enunciamo, per esempio, il risultato ottenuto da Medeiros e Milla-Miranda (1990).

**Teorema 1.** *Supponiamo che siano verificate le ipotesi* $(H1)-(H2)$ *e siano* $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, $u_1 \in H$, $\alpha \in ]0,1]$; *allora esiste una unica soluzione debole* $u$ *del problema*

$$\begin{cases} u''(t) + m\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|\right) Au(t) + A^{\alpha}u'(t) = 0 & , \\ u(0) = u_0 & , \\ u'(0) = u_1 & ; \end{cases} \tag{6}$$

*inoltre, essa gode delle seguenti proprietà di regolarità:*

$$u \in L^{\infty}(0,+\infty;\mathcal{D}(A)) \cap L^2(0,+\infty;\mathcal{D}(A)),$$

$$u' \in L^{\infty}(0,+\infty;H) \cap L^2\left(0,+\infty;\mathcal{D}\left(A^{\frac{1}{2}}\right)\right).$$

Gli stessi autori hanno anche dimostrato che l'energia tende esponenzialmente a zero. Non stabiliscono invece un risultato di regolarità, in quanto, consentendo all'esponente $\alpha$ di essere minore di $\frac{1}{2}$, non vi è motivo perché le soluzioni siano regolari. Basta infatti pensare al caso in cui la funzione $m$ è costante; l'equazione si riduce a essere una normale equazione iperbolica lineare, che non presenta caratteristiche di regolarizzazione.

Supponiamo ora $\alpha = 1$. In questo caso il diverso comportamento dipende essenzialmente dal fatto che l'equazione sia degenere oppure no.

Nel caso non degenere, Nishihara (1984) dimostra che le soluzioni tendono a zero esponenzialmente, mentre nel caso degenere si ha solo una decrescenza di tipo potenza.

Più precisamente, Matos e Pereira (1991) hanno dimostrato che vale la stima

$$\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\| \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}}$$

e Nishihara (1993) che tale stima è ottimale.

Passiamo ora a esaminare la regolarità. Muñoz Rivera (1992) ha dimostrato il risultato seguente.

**Teorema 2.** *Supponiamo verificate le ipotesi (H1) e (H2) e inoltre sia* $m$ *una funzione di classe* $\mathcal{C}^{(1)}$. *Siano poi* $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, *tale che* $m\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2\right) > 0$ *e* $u_1 \in H$; *allora l'unica soluzione del problema* (6) *con* $\alpha = 1$ *è classica e si ha*

$$u \in \mathcal{C}^{(2)}\left(\mathbf{R}^+;\mathcal{D}\left(A^{\infty}\right)\right).$$

Più recentemente, varianti e generalizzazioni delle equazioni precedenti sono state studiate da vari autori (Muñoz Rivera (1996), Ono (1995) e

(1997)), esaminando anche l'effetto che l'aggiunta di termini del tipo $\pm u|u|^\alpha$ oppure $\pm u'|u'|^\alpha$ hanno sul comportamento di equazioni di questo tipo.

## 3. Il caso di un'equazione in uno spazio di Banach

Vediamo ora di esaminare quali risultati possano essere ottenuti per un'equazione del tipo della (4), in uno spazio di Banach. I risultati che esporrò sono in fase di sviluppo e, quindi, ancora incompleti.

Cominciamo col fare le ipotesi sull'operatore $A$ nel caso attuale.

Nel seguito indicheremo con $X$ uno spazio di Banach complesso.

(K1) *L'operatore $A$ è un operatore lineare nello spazio di Banach $X$, il cui opposto genera un semigruppo analitico di tipo negativo.*

Osserviamo esplicitamente che l'ipotesi $(K1)$ assicura, oltre alla risolubilità del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' + Au = 0 & , \\ u(0) = u_0 & , \end{cases}$$

per ogni $u_0 \in X$ e alla convergenza esponenziale a 0 della soluzione, l'esistenza delle potenze frazionarie dell'operatore $A$ e la generazione di un semigruppo analitico anche da parte di $-A^\alpha$, con $\alpha \in ]0,1[$.

Nel seguito, supporremo sempre $\alpha > \frac{1}{2}$.

Osserviamo che, in analogia con quanto si fa usualmente per le equazioni semilineari del primo ordine, si può cercare di introdurre il concetto di soluzione *mild* del problema di Cauchy, considerando il termine non lineare come "funzione nota" e trasformando così il problema nell'equazione integrale, suggerita dal metodo della variazione delle costanti:

$$u'(t) = \exp\left(-\delta t A^\alpha\right) u_1 + \int_0^t \exp\left(-\delta(t-s)A^\alpha\right) m\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u(s)\right\|^2\right) Au(s)ds\,.$$

Tale equazione garantisce la regolarità della derivata $u'$ della soluzione del problema (6), ma non quella di $u$, che non migliora la regolarità del dato iniziale $u_0$. L'idea consiste quindi nello sfruttare la seguente ipotesi di non degenerazione dell'equazione.

(K2) *La funzione $m : [0,+\infty[ \to \mathbf{R}$ è lipschitziana e ha estremo inferiore positivo.*

Allora, posto $\mu = m\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2\right)$, chiamiamo soluzione *mild* del problema (6) una funzione $u \in \mathcal{C}\left([0,b[\ \mathcal{D}\left(A^\alpha\right)\right)$, dove $b \in \mathbf{R}^+$ è opportuno, tale che, $\forall t \in [0,b[$, si abbia:

$$u(t) = U_0(t)u_1 + \left(U_1(t) + \delta U_0(t)A^\alpha\right)u_0 +$$

$$+ \int_0^t A^{1-\alpha}U_0(t-s)\left(\mu - m\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u(s)\right\|^2\right)\right)A^\alpha u(s)ds\,.$$

Qui si è indicato con $U_k(t)$, se $t > 0$ e $k = 0,1$, l'operatore lineare in $X$, definito da

$$U_k(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lambda^k e^{\lambda t}\left(\lambda^2 + \delta\lambda A^\alpha + \mu A\right)^{-1} x\, d\lambda$$

e $\gamma$ è una opportuna curva illimitata del piano complesso.

Si può adesso stabilire, con un argomento di contrazione, un teorema di esistenza e unicità locale per le soluzioni *mild* del problema di Cauchy (6).

**Teorema 3.** *Supponiamo che le ipotesi (K1) e (K2) siano verificate e si abbia* $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, $u_1 \in X$. *Allora, esiste* $T(u_0,u_1) \in \mathbf{R}^+$, *tale che il problema di Cauchy* (6) *ammette una unica soluzione* mild *in* $[0, T(u_0,u_1)[$.

In realtà, la soluzione *mild* così ottenuta, risulta essere, a causa del carattere parabolico dell'equazione considerata, una soluzione classica, che può essere prolungata finché $\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|$ si mantiene limitata. Il problema della prolungabilità della soluzione si riporta dunque all'ottenimento di stime a priori in un opportuno spazio funzionale.

A differenza del caso hilbertiano, in cui stime estremamente efficaci potevano essere ottenute con semplici integrazioni per parti, la situazione qui è più complessa. È comunque possibile riconoscere l'esistenza di soluzioni globali, almeno nel caso in cui $m$ è una funzione potenza.

Rimane aperto il problema dello studio della regolarità spaziale delle soluzioni. In altre parole, è vero che $u(t) \in \mathcal{D}\left(A^n\right)$, per ogni $n \in \mathbf{N}$, non appena $t > 0$?

I risultati illustrati si prestano a vari tipi di generalizzazioni. Si può sicuramente sostituire l'operatore $A^\alpha$ con operatori strettamente positivi, che abbiano la stessa *forza* nei confronti dell'operatore $A$ e commutino con esso. Non vi è invece alcuna necessità di fare ipotesi estremamente onerose, quali quella in ambiente hilbertiano di autoaggiunzione dell'operatore $A$. È però opportuno segnalare che proprio questo impone di scegliere $\alpha > \frac{1}{2}$, in quanto

non è garantita la parabolicità dell'operatore del secondo ordine considerato, se $\alpha = \frac{1}{2}$, non appena l'operatore $A$ abbia spettro essenzialmente non reale (si veda Favini-Obrecht (1992)).

Un'altra generalizzazione per la quale il metodo qui introdotto funziona perfettamente è la seguente.

Si consideri un problema di valori iniziali e al contorno per la seguente equazione

$$\partial_t^2 - \delta \Delta_x \partial_t u - \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0 \tag{7}$$

che governa il moto di una membrana fissata con viscosità lineare. L'esistenza globale delle soluzioni di tale problema è stata dimostrata da Kobayashi, Pecher e Shibata (1993).

Ebbene, il problema per l'equazione (7) può essere riformulato in modo astratto nella seguente equazione

$$u'' + Au' + m\,(u, Cu)\, Bu = 0\,, \tag{8}$$

dove $A$ è l'opposto del generatore di un semigruppo analitico di tipo negativo e $B$ è un operatore lineare dominato da $A$, mentre $C$ è un operatore lineare dominato da $A^{\frac{1}{2}}$. Inoltre, $m$ è una funzione reale.

L'esistenza globale delle soluzioni per l'equazione (7) può essere dimostrata adesso con facilità, perché, in questo caso, risulta

$$|m\,(u, Cu)| \leq 2\,;$$

pertanto, la stima a priori necessaria per l'esistenza globale può essere ottenuta molto facilmente dall'equazione che costituisce la definizione di soluzione *mild*.

# BIBLIOGRAFIA

A.Arosio - S.Spagnolo: Global Solution to the Cauchy Problem for a Nonlinear Equation, in Brézis, H. - Lions, J.-L. (eds.) *Nonlinear PDE's and their Applications*. Pitman Res. Notes Math., vol.106 (1984), pp. 1-26

S. Bernštein: Sur une classe d'équations fonctionnelles aux dérivées partielles, Izv.Akad.Nauk SSR, 4 (1940), pp. 17-26

P.D'Ancona - S.Spagnolo: Global Solvability for the Degenerate Kirchhoff Equation with Real Analytic Data, Invent.Math., **108** (1992), pp. 247-262

A.Favini - E.Obrecht: Conditions for Parabolicity of Second Order Abstract Parabolic Equations, Differential Integral Equations, **4** (1991), pp.1005-1022

T.Kobayashi - H.Pecher - Y.Shibata: On a Global in Time Existence Theorem of Smooth Solutions to a Nonlinear Wave Equation with Viscosity, Math.Ann., **296** (1993), pp.215-234

M.P.Matos, D.C.Pereira: On a Nonlinear Wave Equation with Strong Damping, Funkcial.Eqvac., **34** (1991), pp.303-311

L.A.Medeiros - M.Milla Miranda: On a Non Linear Wave Equation with Damping, Rev.Mat.Univ.Complut.Madrid, **3** (1990), pp.

J.E.Muñoz Rivera: Smoothness Effect and Decay on a Class of Non Linear Evolution Equation, Ann.Fac.Sci.Toulouse, **1** (1992), pp.237-260

J.E.Muñoz Rivera: Global Solution and Regularizing Properties on a Class of Nonlinear Evolution Equation, J.Differential Equations, **128** (1996), pp.103-124

K.Nishihara: Degenerate Quasilinear Hyperbolic Equation with Strong Damping, Funkcial.Eqvac., **27** (1984), pp.125-145

K.Nishihara: Decay Properties of Solutions of Some Quasilinear Hyperbolic Equations with Strong Damping, Nonlinear Analysis T.M.A., **21** (1993), pp.17-21

E.Obrecht: Strongly Damped Wave Equations in a Banach Space (in preparazione)

K.Ono: Global Existence and Decay Properties of Solutions for Some Degenerate Nonlinear Wave Equation with a Strong Dissipation, J.Math.Tokushima Univ., **29** (1995), pp.43-54

K.Ono: On Global Existence, Asymptotic Stability and Blowing Up of Solutions for Some Degenerate Non-linear Wave Equations of Kirchhoff Type with a Strong Dissipation, Math.Meth.Appl.Sci., **20** (1997), pp.151-177

S.I.Pohožaev: On a Class of Quasilinear Hyperbolic Equations, (in russo), Mat.Sb., **96 (138)** (1975), pp. 152-166 = Math.USSR-Sbornik, **25** (1975), pp.145-158